



# ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

---

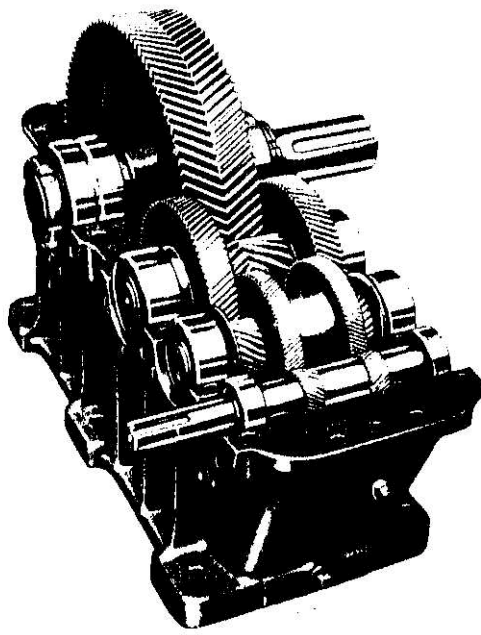
APUNTES DE LA ASIGNATURA:

## TEORÍA DE MÁQUINAS

ASIGNATURA OBLIGATORIA DE 3º DE INGENIERÍA INDUSTRIAL

### TEMA 9

### TRENES DE ENGRANAJES



JESÚS M<sup>º</sup> PINTOR BOROBIA  
*DR. INGENIERO INDUSTRIAL*  
DPTO. DE INGENIERÍA MECÁNICA,  
ENERGÉTICA Y DE MATERIALES

IRUÑA, NOVIEMBRE DE 1997



## INDICE

- 9.1 INTRODUCCIÓN.
- 9.2 CLASIFICACIÓN.
- 9.3 TRENES ORDINARIOS SIMPLES Y COMPUESTOS.
  - 9.3.1 Relación de transmisión. Criterio de signos.
  - 9.3.2 Potencias y pares transmitidos. Rendimiento.
- 9.4 TRENES EPICICLOIDALES SIMPLES
  - 9.4.1 Relación de velocidades.
  - 9.4.2 Relación de pares. Rendimiento.

## 9.1 Introducción

Un tren de engranajes (Fig. 9.1) es un mecanismo formado por varios pares de engrane acoplados de tal forma que el elemento conducido de uno de ellos es el conductor del siguiente. Suele definirse como aquella cadena cinemática formada por varias ruedas que ruedan sin deslizar entre sí; o bien como cualquier sistema de ejes y ruedas dentadas que incluya más de dos ruedas.

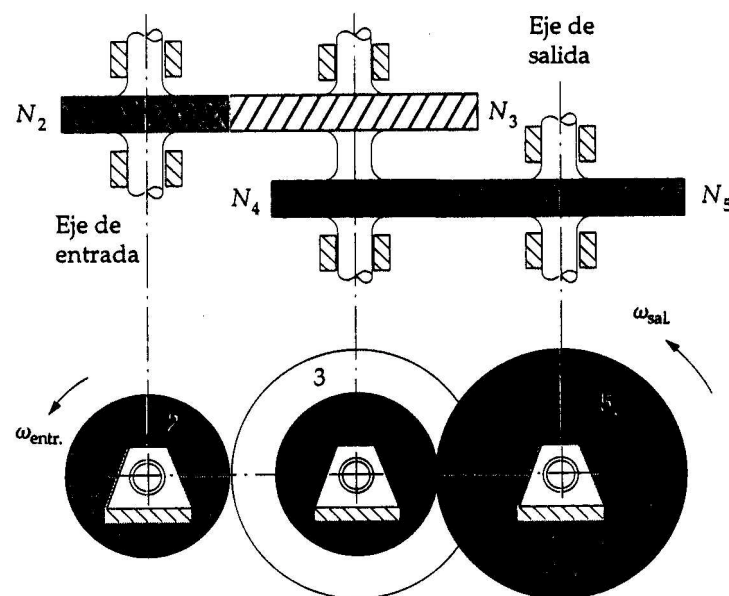


Figura 9.1 – Trenes de engranajes.

En muchos casos, se recurre a ellos porque no es posible establecer una determinada relación de transmisión entre dos ejes mediante un solo par de ruedas dentadas; o también porque se desea obtener un mecanismo con relación de transmisión variable, lo que tampoco es posible con un solo par de ruedas.

Los casos más frecuentes en los que la relación de transmisión  $\mu$  no puede ser generada solamente por dos ruedas son:

- **Cuando la relación de transmisión  $\mu$  es muy distinta de la unidad:**

Por un lado, tenemos el número mínimo de dientes que pueden tallarse sin que se produzca interferencia de tallado ( $2/\sin^2\phi$ ).



También existen limitaciones constructivas que limitan el número máximo de dientes que pueden tallarse sobre una rueda. La razón principal es que los errores cometidos durante el tallado, aunque sean muy pequeños y tal vez no influyan en el engrane de una determinada pareja de dientes, son acumulativos. Como consecuencia, el último diente tallado puede quedar excesivamente cerca o lejos del primero falseando el paso y haciendo que el engranaje no funcione correctamente. De ahí que generalmente no se suele admitir pasar de 200 dientes en engranajes industriales (reductores de velocidad de turbinas muy rápidas) y de 100 en mecánica fina de precisión; si bien no se llega a estos límites más que en casos excepcionales.

Por otra parte, sabemos que pueden construirse ruedas con un número de dientes menor que  $2/\sin^2\phi$  tallando engranajes corregidos.

Uniando todo ello, podemos ver que el valor mínimo (su inverso será el máximo) que podemos alcanzar en la relación de transmisión es de orden de:

$$\mu_{\min} = 15/100 \div 15/200 \cong 1/6 \div 1/12$$

aunque, en la práctica, con engranajes cilíndricos suele ser habitual que  $\mu_{\min} \cong 1/5 \div 1/7$ .

Los números máximo y mínimo de dientes definen una relación de transmisión que no puede sobrepasarse y a la que se recomienda no llegar, a ser posible, para evitar una disminución notable del rendimiento, un aumento del desgaste, ruido y dificultades en el montaje.

Además, otra razón de peso es que no interesa que la rueda de menos dientes resulte excesivamente pequeña en relación a la otra: en tal caso, el piñón se desgasta más que la rueda al entrar más veces en contacto sus dientes y sufrir con ello un mayor desgaste y un mayor número de ciclos de fatiga por unidad de tiempo. En cualquier caso, en general se suele tener en cuenta esta diferencia y *se utiliza un mejor material para el piñón*.

- **La relación de transmisión  $\mu$  viene definida por una fracción irreducible  $\mu = a/b$**  dentro de los márgenes descritos en el punto anterior, pero **tal que  $a > z_{\max}$  y  $b > z_{\max}$** . Por ejemplo  $\mu = 133/171$ .
- **La relación de transmisión  $\mu$  viene definida por un número racional que no puede establecerse con la suficiente aproximación** mediante un único par de ruedas de dimensiones limitadas. Por ejemplo  $\mu = \pi = 3.14159 \dots$
- **La relación de transmisión  $\mu$  ha de establecerse entre dos ejes excesivamente alejados** como para establecer la transmisión mediante sólo dos ruedas de dimensiones normales. En ocasiones, cuando sucede este tipo de problemática, la solución puede estar en buscar otro tipo de transmisión: correas, cadenas, ...



## 9.2 Clasificación

La clasificación de los trenes de engranajes, como cualquier otra clasificación, es un tema muy subjetivo, en la medida en que depende del criterio o criterios elegidos para realizarla. A partir de consideraciones de índole cinemática, una posible clasificación puede ser:

- **Trenes ordinarios:** que, a su vez, pueden dividirse en:
  - + Trenes ordinarios **simples**.
  - + Trenes ordinarios **compuestos**. Estos, así mismo, podrán ser recurrentes o no recurrentes.
- **Trenes epicicloidales:** que pueden subdividirse en:
  - + Trenes epicicloidales **simples**.
  - + **Diferenciales**.
  - + Trenes epicicloidales **de balancín**.
- **Trenes mixtos:** en los que coexisten los dos tipos de trenes de engranajes anteriores.

La diferencia fundamental estriba en que en los trenes epicicloidales existe algún eje que tiene movimiento relativo respecto de los demás; mientras que en los trenes ordinarios el único movimiento que pueden tener los ejes es el de giro sobre sí mismos.

## 9.3 Trenes ordinarios simples y compuestos

En un **tren ordinario**, las ruedas extremas del tren giran sobre los dos ejes entre los que ha de establecerse la relación de transmisión deseada. En él, todos los ejes de las ruedas que lo componen (tanto extremas como intermedias) apoyan sobre un mismo soporte fijo.

### 9.3.1 RELACIÓN DE TRANSMISIÓN. CRITERIO DE SIGNOS

Se dice que un **TREN ORDINARIO** es, además, **SIMPLE** cuando cada eje contiene únicamente una rueda (Fig. 9.2).

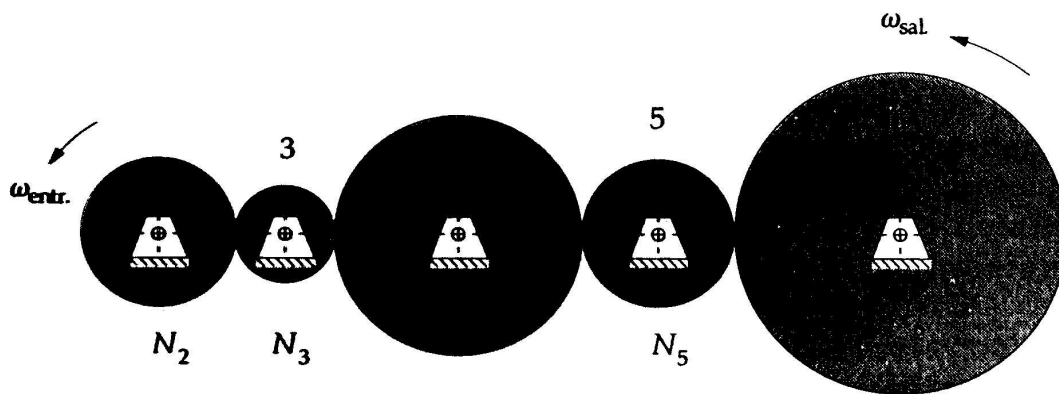


Figura 9.2 – Tren ordinario simple.

- En este caso, se cumple:

$$\omega_1 \cdot Z_1 = -\omega_2 \cdot Z_2, \quad \omega_2 \cdot Z_2 = -\omega_3 \cdot Z_3, \quad \dots = \dots, \quad \omega_{n-1} \cdot Z_{n-1} = -\omega_n \cdot Z_n \quad (1)$$

donde todas las ruedas deben tener el mismo módulo y la relación de transmisión que se desea conseguir es  $\mu = \pm \omega_n / \omega_1$ .

- Multiplicando entre sí los términos de la derecha y de la izquierda de las ecuaciones (1):

$$\prod_{i=1}^{n-1} \omega_i \cdot Z_i = \prod_{j=2}^n -\omega_j \cdot Z_j \quad \omega_1 \cdot Z_1 = \pm \omega_n \cdot Z_n \quad (2)$$

- De donde resulta:

$$\mu = \frac{\omega_n}{\omega_1} = \pm \frac{Z_1}{Z_n} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{Z_1}{Z_n} \quad (3)$$

- EL número de dientes de las ruedas intermedias no influye en el valor absoluto de la relación de transmisión ( $\mu$ ). Son las llamadas **ruedas parásitas**: pueden servir para invertir el sentido de giro final (el signo de la relación de transmisión) o para modificar la distancia entre los ejes de entrada y salida.
- Otra posible aplicación de los trenes ordinarios simples tiene lugar en el caso de que se desee tener más de un eje de salida de movimiento, para una sola entrada.

Por otra parte, se dice que un **TREN ORDINARIO** es **COMPUESTO** cuando, al menos, uno de los ejes es común a varias ruedas (Fig. 9.1). El caso más sencillo posible es el que se puede apreciar en la Figura 9.3.

- Las relaciones que se plantean son, independientemente de los signos:

$$\omega_1 \cdot Z_1 = \omega_2 \cdot Z_2 \quad (4)$$

$$\omega_2 = \omega_3 \quad (5)$$

$$\omega_3 \cdot Z_3 = \omega_4 \cdot Z_4 \quad (6)$$

de donde, relacionando (4) y (5):

$$\omega_{\text{entrada}} = \omega_1 = \omega_2 \cdot Z_2 / Z_1 \quad (7)$$

y relacionando (5) y (6):

$$\omega_{\text{salida}} = \omega_4 = \omega_3 \cdot Z_3 / Z_4 = \omega_2 \cdot Z_3 / Z_4 \quad (8)$$

Tomando en consideración ahora (7) y (8):

$$\mu = \frac{\omega_{\text{salida}}}{\omega_{\text{entrada}}} = \pm \frac{Z_1 \cdot Z_3}{Z_2 \cdot Z_4} \quad (9)$$

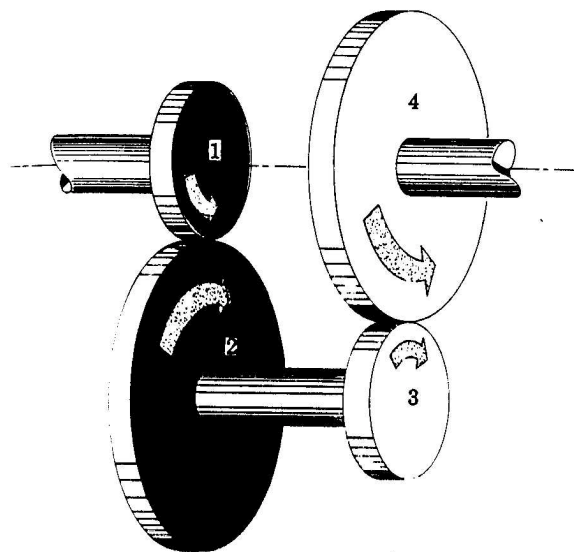


Figura 9.3 – Tren ordinario compuesto.

- Y esta relación (9) hubiese sido la misma aun cuando entre las ruedas ① y ②, o entre ③ y ④, existieran varias ruedas intermedias; ya que cada grupo se comporta como un tren ordinario simple y, por lo tanto, el módulo de  $\mu$  depende únicamente de las ruedas extremas.
- Si separamos el tren de engranajes en parejas de ruedas engranando, tendremos dos grupos: A y B. En el grupo A, el movimiento “entra” por ① y “sale” por ② (rueda **conductora** y **conducida**, respectivamente). Análogamente, en el grupo B, el movimiento “entra” por ③ y “sale” por ④. Si hubiera más grupos, (C, D, ...) el esquema se repetiría. En tal caso, observando la expresión (9) obtenida, podemos deducir:

$$\mu = \frac{\omega_{\text{salida}}}{\omega_{\text{entrada}}} = \pm \frac{\prod Z_{\text{conductoras motrices}}}{\prod Z_{\text{conducidas}}} = \pm \frac{\prod Z_M}{\prod Z_C} \quad (10)$$

en cuanto al signo, el procedimiento más adecuado es obtenerlo observando directamente la figura que representa esquemáticamente el tren.

- Si en un tren de engranajes ordinario simple es necesario que todas las ruedas tengan el mismo módulo, no sucede lo mismo en el caso del tren ordinario compuesto. En el caso de la Fig. 9.3, si  $R_3 < R_2$ , para transmitir la misma potencia de giro ( $Pot = M_t \cdot \omega = T \cdot R_t \cdot \omega$ ) es preciso una fuerza mayor (es decir, la componente tangencial a la circunferencia primitiva de funcionamiento -T- del esfuerzo de contacto entre dientes es mayor:  $T_B > T_A$ ); por lo tanto, los dientes de las ruedas del grupo B están más solicitadas que las del grupo A y deberían ser construidas con un módulo mayor.

Se dice que un **TREN** de engranajes **ORDINARIO COMPUESTO** es **RECURRENTE** cuando el eje de salida (S) y el de entrada (E) son coaxiales (Fig. 9.3):

- En un tren de este tipo, y con ruedas exteriores, se verifica que:  $R_1 + R_2 = R_3 + R_4$ ; o bien:  

$$m_A \cdot (Z_1 + Z_2) = m_B \cdot (Z_3 + Z_4) \quad (11)$$

de donde, si las ruedas no están corregidas, los módulos habrán de cumplir que:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{Z_3 + Z_4}{Z_1 + Z_2} \quad (12)$$

- Y si existen  $p_A$  ruedas intermedias entre las ruedas ① y ②, y  $p_B$  entre ③ y ④:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{Z_3 + Z_4 + 2 \sum_{i=1}^{p_B} Z_i}{Z_1 + Z_2 + 2 \sum_{j=1}^{p_A} Z_j} \quad (13)$$

- En trenes ordinarios compuestos no recurrentes (Fig. 9.4) con excentricidad "e" entre el eje de entrada y el de salida, la condición a cumplir será:

$$R_1 + R_2 + e = R_3 + R_4$$

es decir:

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{Z_3 + Z_4 + 2 \sum_{i=1}^{p_B} Z_i}{Z_1 + Z_2 + \frac{e}{m_A} + 2 \sum_{j=1}^{p_A} Z_j} \quad (14)$$

- Expresiones todas ellas válidas para el caso de engranajes cilíndricos de dientes rectos.

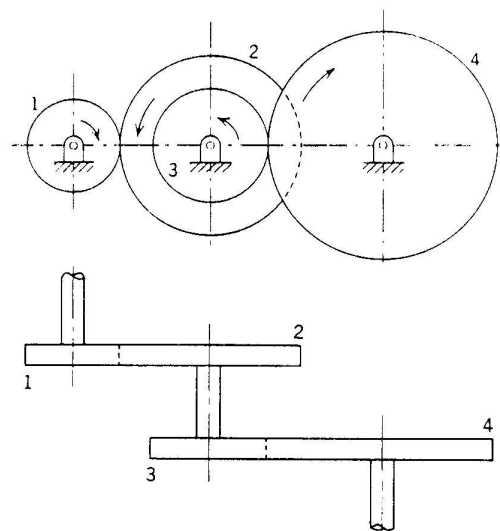


Figura 9.4 – Tren compuesto no recurrente.



### 9.3.2 POTENCIAS Y PARES TRANSMITIDOS

Prescindiendo del rozamiento, todas las fuerzas que intervienen en un tren de engranajes son las mismas si el tren está quieto, si el tren se mueve con velocidades uniformes en un sentido o si se mueve en sentido contrario. Ello es una consecuencia de que todas las fuerzas de inercia quedan equilibradas.

Por ejemplo, en la figura 9.5b los sentidos de giro son contrarios a los de la figura 9.5a, pero las fuerzas que intervienen son las mismas. La diferencia estriba en que en el primer caso  $M_1$  actúa en el mismo sentido que  $\omega_1$  y, por lo tanto, es un **par motor** que introduce trabajo en el sistema; mientras que  $M_2$  es un **par resistente** que saca trabajo del sistema. Sin embargo, en el segundo caso,  $M_1$  es el resistente y  $M_2$  el motor.

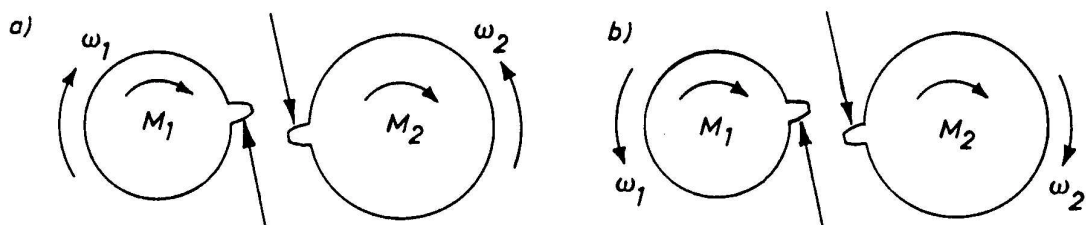


Figura 9.5 – Las fuerzas no dependen de los sentidos de giro.

Se denominan **fuerzas activas** a aquéllas que introducen o sacan trabajo en el sistema. Esto excluye las reacciones en los apoyos y los empujes mutuos entre dientes. Así, las únicas fuerzas activas que hay que considerar en un tren de engranajes son los pares exteriores que actúan sobre las piezas giratorias en su plano de giro.

Para analizar los pares activos basta con aplicar de forma sistemática el **teorema de las potencias virtuales**: en un sistema en equilibrio pero que puede moverse (o se mueve), en cualquier movimiento posible la suma de las potencias que entran al sistema es nula.

Observando la Figura 9.6, en la que los pares activos son  $M_1$  y  $M_2$ , ha de cumplirse:

$$\boxed{M_1 \cdot \omega_1 + M_2 \cdot \omega_2 = 0} \quad (15)$$

De donde, operando:

$$\boxed{\frac{M_1}{M_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} = -\mu} \quad (16)$$

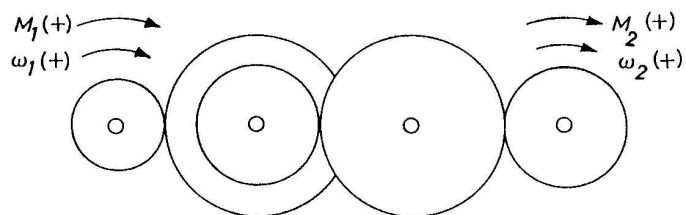


Figura 9.6 – Tren ordinario. Pares activos.

En la figura se observa que si  $\omega_1$  tiene realmente el sentido dibujado,  $\omega_2$  debe tener el sentido contrario. Esto se traduce en que  $\mu$  tendrá un valor negativo, con lo que según (16)  $M_1$  y  $M_2$  tendrán el mismo signo (el dibujado o el contrario).

En un tren de engranajes, los pares activos sobre los ejes se transmiten de un eje al otro por medio de fuerzas tangenciales sobre los contornos de las ruedas (sobre las circunferencias primitivas de funcionamiento). Como ya vimos, la acción mutua entre dos ruedas es una fuerza ( $F$ )

perpendicular a la superficie del diente; de modo que, en general, esta fuerza tendrá una componente tangencial (T), otra axial (A) paralela al eje, y otra radial (R) perpendicular al eje. De todas ellas, la única que daba momento respecto al eje era la tangencial (T).

Las componentes tangenciales (T) quedan determinadas por los pares activos que actúan sobre los ejes, y no dependen de la forma de los dientes. Sin embargo, las otras componentes (A y R) quedan determinadas en función de T y la forma del diente.

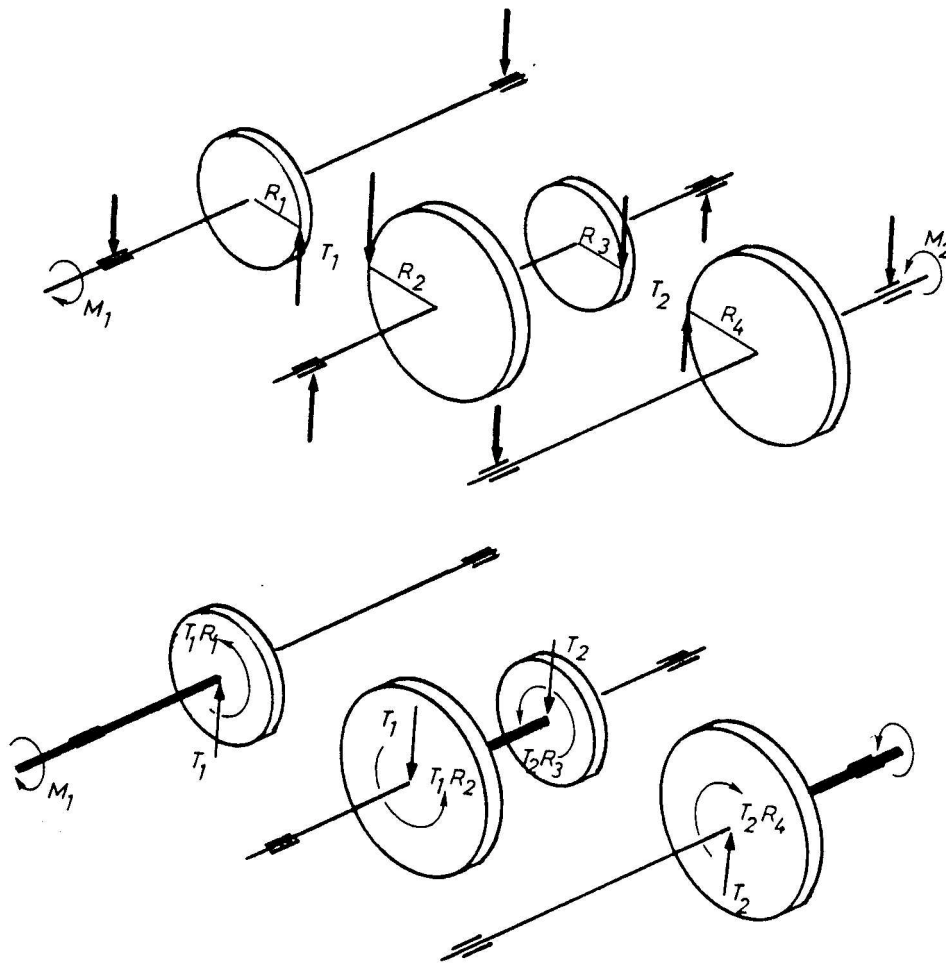


Figura 9.7 – Fuerzas tangenciales en un tren ordinario.

Así, en el tren ordinario compuesto de la Figura 9.7a, **las fuerzas tangenciales quedan determinadas por las condiciones de equilibrio de cada eje.** Los momentos respecto al eje son:

$$\text{(primer eje)} \quad M_1 - T_1 \cdot R_1 = 0 \quad (17)$$

$$\text{(segundo eje)} \quad -T_1 \cdot R_2 + T_2 \cdot R_3 = 0 \quad (18)$$

$$\text{(tercer eje)} \quad T_2 \cdot R_4 - M_2 = 0 \quad (19)$$

que permiten determinar  $T_1$ ,  $T_2$  y  $M_2$  en función de  $M_1$ .

El equilibrio del eje exige también que existan **en los apoyos unas reacciones de sentido contrario a T**. Estas fuerzas serán las mismas si el tren está quieto, que si gira uniformemente en un sentido o en otro.



En estas condiciones de equilibrio, hay algunos trozos del eje que quedan sometidos a flexión y torsión. Esto se pone en evidencia en la Figura 9.7b, al trasladar las fuerzas tangenciales ( $T$ ) al centro de las ruedas y añadiendo unos pares ( $T \cdot R$ ) que compensen esa traslación. En el primer eje, por ejemplo, la nueva fuerza  $T_1$  se equilibra con las reacciones de los apoyos, que están en el mismo plano. Este equilibrio se traduce en flexar todo el trozo del eje comprendido entre los apoyos. Al mismo tiempo, el par  $M_1$  se equilibra con el par  $T_1 \cdot R_1$ , pero este equilibrio se traduce en retorcer todo el trozo de eje comprendido entre los planos de acción de ambos pares.

En la Figura 9.7, los trozos de eje sometidos a torsión están señalados con trazo grueso. En definitiva, el par  $M_1$  se transmite hasta  $M_2$  a lo largo de sucesivos trozos de eje que quedan sometidos a torsión.

Por último, recordar como en un tren de engranajes, a medida que disminuye la velocidad de giro ( $\omega$ ) de las ruedas aumenta el par transmitido (ya que la potencia transmitida debe de permanecer constante, salvo pérdidas por rozamiento,  $Pot = M_i \cdot \omega = T \cdot R_i \cdot \omega$ ), por lo que las ruedas han de ser más robustas.

## 9.4 Trenes epicicloidales simples

**Tren epicicloidal** (Fig. 9.8) es aquel tren de engranajes en el que alguna rueda gira en torno a un eje que no es fijo, sino que gira en el espacio:

- Al brazo ③ que gira se le llama **portasatélites**.
- A la rueda ④ que gira alrededor de dicho eje se la denomina **satélite**.
- El sistema, de esta manera, tiene dos grados de libertad que se restringen a uno haciendo girar al satélite alrededor de una **rueda fija o central** ②.

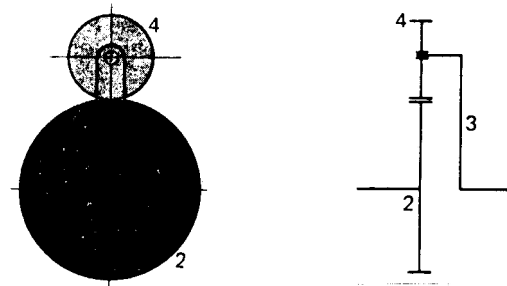


Figura 9.8 – Tren epicicloidal elemental.

En el caso de los trenes epicicloidales, también cabe hablar de trenes recurrentes o no recurrentes, según que los ejes de entrada y salida sean o no coaxiales.

### 9.4.1 RELACIÓN DE VELOCIDADES

Para resolver el problema cinemático se procede de la siguiente manera:

- Nos situamos sobre el brazo portasatélites, para estudiar el movimiento relativo respecto del mismo (es decir lo convertimos en el eslabón de referencia). Desde el punto de vista analítico, ello equivale a introducir una velocidad  $-\omega_3$  (siendo  $\omega_3$  la velocidad de giro del brazo portasatélites) al conjunto del sistema.
- El brazo, de esta forma, se queda fijo, la rueda fija gira con velocidad  $-\omega_3$  y la rueda satélite ④ con velocidad  $\omega_4 - \omega_3$ .
- El resultado es, por tanto, un simple caso de un par de ruedas o tren ordinario (si existen ruedas intermedias):

$$\frac{\omega_4 - \omega_3}{\omega_3} = \frac{R_2}{R_4} = \frac{R_{FUA}}{R_{SATELITE}} = \frac{Z_{FUA}}{Z_{SATELITE}} \quad \frac{\omega_{SATELITE}}{\omega_{PORTA SATELITE}} - 1 = \frac{Z_{FUA}}{Z_{SATELITE}} \quad (20)$$

de donde:

$$\omega_{SATELITE} = \frac{Z_{FUA} + Z_{SATELITE}}{Z_{SATELITE}} \cdot \omega_{PORTA SATELITE} \quad (21)$$

Para obtener el movimiento de salida, se coloca (Fig. 9.9) una **segunda rueda central o corona** ④:

- Paramos el portasatélites ①:

$$\frac{\omega_{41}}{\omega_{21}} = \frac{\omega_4 - \omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = -\frac{Z_2}{Z_4} \quad (22)$$

- De donde, dado que  $\omega_2 = 0$ :

$$\omega_4 - \omega_1 = \frac{Z_2}{Z_4} \cdot \omega_1 \quad \boxed{\frac{\omega_4}{\omega_1} = 1 + \frac{Z_2}{Z_4}} \quad (23)$$

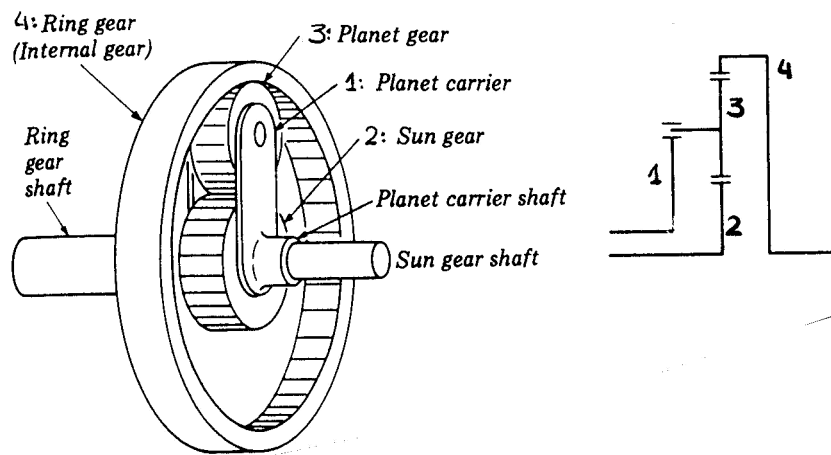


Figura 9.9 – Tren epicicloidal simple.